

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \lambda A = C \\ \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \lambda_j x_i \right) - \sum_{j=1}^m b_j \lambda_j = 0 \end{cases}$$

⇕

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \lambda A = C \\ \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \lambda_j \right) \cdot x_i \right) - C \lambda = 0 \end{cases}$$

⇕

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \lambda A = C \\ C \lambda > = \sum_{i=1}^n C_i \cdot x_i = -f(x^0) = \end{cases} \quad (N \sim (3))$$

$$= -\min f(x) = \max x \langle C, x \rangle$$

Т.е. λ - реш. двойств. задачи к (1)

321 группа
 Брызгалов Антон
 Аграновский Михаил
 Матвеев Владислав
 Смирнов Александр

Т. (KKT) для O_3 MIT

$$(1) \max_{Ax \leq b} \langle C, x \rangle \Leftrightarrow -\min_{Ax \leq b} \langle -C, x \rangle \quad (2)$$

$$f(x) = - \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i - b_j \quad - \text{мин. оцр.} \Rightarrow \text{рег.}$$

$$\min_{Ax \leq b} \langle -C, x \rangle \Leftrightarrow \min_{\substack{f(x) \\ g_j(x) \leq 0 \quad j=1, \dots, m}} f(x) \quad (3)$$

$f(x), g_j(x)$ - выпуклые $\mathbb{R}^n$ и $\in C^2(\mathbb{R}^n)$, т.к. линей.

Пусть x^0 - реш задачи (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \geq 0 \\ \text{grad}_x (f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x) \lambda_j) = 0 \\ \langle g(x), \lambda \rangle = \sum_{j=1}^m g_j(x) \lambda_j = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ -c_i + \sum_{j=1}^m a_{ij} \lambda_j = 0 \quad i=1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i - b_j \right) \lambda_j = 0 \end{cases}$$

Т.4 (Каруша - Куна - Таккера) Если в задаче (1)-(2) ф-и f, g_i выпуклы на $\mathbb{R}^n$, $f, g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, мн-во $X \neq \emptyset$ и регулярно $\forall x \in X$, то x^0 - т. min в (1)-(2) $\Leftrightarrow \exists \lambda \geq 0$:

Док-во: выберем λ : вып. (3) $\Rightarrow x^0$ - т. мин. $\mathcal{L}(x, \lambda)$
по x

$$f(x^0) = f(x^0) + \langle \lambda, g(x^0) \rangle = \mathcal{L}(x^0, \lambda) \leq \mathcal{L}(x, \lambda) \quad \forall x \in X$$

$$\underbrace{f(x)}_{\geq 0} + \underbrace{\langle \lambda, g(x) \rangle}_{\leq 0} \leq f(x^0) \quad \forall x \in X$$

Задача 9. Расшифровать т.4 для ОЗЛП и показать, что λ - решение двойственной задачи ЛП

$$\text{ОЗЛП: } \max_{Ax \leq b} \langle c, x \rangle = \min_{\substack{\lambda A = c \\ \lambda \geq 0}} \langle \lambda, b \rangle$$

$$d^{**} = \min \langle \begin{bmatrix} b \\ b' \end{bmatrix}, y \rangle$$

$$y \begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix} = c \quad (3)$$

$$y \geq 0$$

$$y \in \mathbb{R}^m \quad // \quad m = n + k$$

$$a) \quad b' = \bar{0} \Rightarrow \min \langle \begin{bmatrix} b \\ b' \end{bmatrix}, y \rangle = \min \langle b, y^k \rangle$$

$$b) \quad y \begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix} = \begin{cases} y^k A_i - y_{i+k} = c_i \\ y^k A_i = c_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^k A_i = c_i \end{cases} \quad (y_{i+k} = 0) \quad i = 1 \dots m$$

где y^k - k первых знач. вектора y

A_i - i -ый столбец A

c_i - i -ый элемент вектора c

$$c) \quad y \geq 0 \Leftrightarrow y_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots m$$

Получается, что d^{**} не существенно зависит от n последних членов вектора y . Их можно выбирать как угодно, но нужно помнить что они ≥ 0 .

Таким образом, двойственная задача будет выглядеть так:

$$d^{**} = \min \langle b, y^k \rangle$$

$$y^k A = c \quad // \text{ в силу произв. } (y_{i+k})$$

$$y^k \geq 0$$

$$y^k \in \mathbb{R}^k$$

где y^k - вектор размерности k

Студенты 321 гр.
Аграновский Михаил
Брызгалов Антон
Мирошник Владислав
Смирнов Александр

Задача: Построить двойственную задачу к задаче

$$d^* = \max \langle c, x \rangle \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$(1) \quad A \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

Решение:

① Перейдем к ОЗ ЛП

$$x \geq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, \dots, n}$$

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad n \times n \text{ - размер}$$

$$b' = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad n \times 1 \text{ - размер}$$

$$\underline{x \geq 0 \Leftrightarrow A'x \leq b'}$$

Получилась задача:

$$d^* = \max \langle c, x \rangle \\ \begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ b' \end{bmatrix} \\ x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

② Найдем двойственную к ОЗ ЛП (2) по определению

Задача 7 Построить двойственную задачу

к задаче

$$\max \langle c, x \rangle$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Упр. 2. Сформулировать двойственные переменные:

Задача 8 Задача ЛП эквивалентна задаче
решения системы л.л.н. ур. с ограничениями
неотр. переменных

/ если ограничения не в переписаны в

$$\text{Также } |\det D'_\alpha| = \left| \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)} (-1)^{\sigma(\alpha)} \prod_{i=1}^{\ell} d'_{i, \alpha_i} \right| \leq \sum_{\alpha} |\dots| =$$

$$= \sum_{\alpha} \prod_{i=1}^{\ell} d'_{i, \alpha_i} \leq \left\{ \prod_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} |d'_{i,j}| = \sum_{\alpha} \prod_{i=1}^{\ell} d'_{i, \alpha_i} + \sum_{\alpha} \dots \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha} (\dots) < \prod_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} |d'_{i,j}| \leq \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{j=1}^{\ell} |d'_{i,j}| \leq \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{j=1}^{\ell} (|d'_{i,j}| + 1) \leq$$

$$\leq \prod_{i=1}^{m+1} \prod_{j=1}^{n+1} (|d'_{i,j}| + 1) \quad , \quad \begin{matrix} m+1 \geq \ell \\ n+1 \geq \ell \end{matrix} \quad (272)$$

2.2. Вернемся к остр. задаче, учитывая:

$$L \geq (1) + (2) \quad (\geq)$$

Согласно р-л $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab$, имеем:

$$(1) \geq \lg \underbrace{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (|a_{i,j}| + 1)}_{(*)} + \lg \underbrace{\prod_{i=1}^m (|b_i| + 1)}_{(**)} + \lg \underbrace{\prod_{j=1}^n (|c_j| + 1)}_{(***)} =$$

Здесь $(*)$ — произведение
стр. элементов
матр. A

$$= \lg [(*) (**) (***)] \geq \lg \prod_{i=1}^{m+1} \prod_{j=1}^{n+1} (|d'_{i,j}| + 1) \quad \text{— по лемме 2.1}$$

$$(2) \geq \lg n$$

$$(\geq) \lg \prod_{i=1}^{m+1} \prod_{j=1}^{n+1} (|d'_{i,j}| + 1) + \lg n \stackrel{2.1}{\geq} \lg \Delta D - \lg 4 =$$

$$= \lg (n \Delta D) = O(\ln(n \Delta D)) \Leftrightarrow O(\ln(n \Delta)).$$

$$\text{Таким образом, } L \geq O(\ln(n \Delta)). \quad (273)$$

12.10.16

Мирошник Владислав
Смирнов Александр
Брызгалов Антон
Аграновский Михаил } 321 гр.

$]L \equiv$ Битовая длина входа $\mathcal{D}$ из $\mathcal{M}$.

Докажите, что $L \geq O(\ln(n\Delta))$, $\Delta \equiv \Delta \mathcal{D} \equiv \max_{\substack{\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D} \\ \mathcal{D}' \in \mathbb{R}^{l \times l}}} |\det \mathcal{D}'|$.

$\mathcal{D}$ -во:

1. Отметим, что входы $\mathcal{D}$ из $\mathcal{M}$ $\max_{x \in \mathbb{R}^n} (C, x)$ кей-са матрица

$$\mathcal{D} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \\ c_1 & \dots & c_n & 0 \end{bmatrix} = [d_{ij}]$$

$$\text{Тогда } L \equiv \text{bit } \ln(\mathcal{D}) \geq \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lceil \lg(|a_{ij}|+1) \rceil}_{(2)} + \sum_{i=1}^m \lceil \lg(|b_i|+1) \rceil + \sum_{j=1}^n \lceil \lg(|c_j|+1) \rceil + \lceil \lg(n+1) \rceil.$$

т.е. эн-ты
матр
матр-даты
отпр-сены

Здесь (1) кодирует непосредственно непосредственно содержание матрицы, а (2) позволяет "расширить" этот код на эн-ты матрицы (т.е. воссоздать форму матрицы)

2. Перейдем к тематико-метаматематической теме $\mathcal{D}$ -ва.

2.1. Докажем вспомогательное утверждение:

$$\Delta \mathcal{D} \leq \prod_{i=1}^{m+1} \prod_{j=1}^{n+1} (d_{ij}+1).$$

$\mathcal{D}$ -во:

$$\exists \mathcal{D}'_* \in \mathbb{R}^{l \times l}, \mathcal{D}'_* \subseteq \mathcal{D} \text{ и } |\det \mathcal{D}'_*| = \max_{\substack{\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D} \\ \mathcal{D}' \in \mathbb{R}^{l \times l}}} |\det \mathcal{D}'|.$$

Студенты 321 гр
Артюховский Михаил
Брызгалов Антон
Мартини Владислав
Смирнов Александр

Задача

Свести ЛП в общей форме к O_3 ЛП

I Общая форма задачи ЛП и реализацию x^*
Нужно найти $\max \langle c, x \rangle$, $x \in R^n$, c -вектор
на допустимом мн-ве, заданном системой
$$\begin{cases} A^1 x \leq b^1 \\ A^2 x = b^2 \\ x_j \geq 0 \quad \forall j \in Y \subseteq \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

II O_3 ЛП и реализацию x^*
Нужно найти $\max \langle c, x \rangle$, $x \in R^n$, c -вектор
на допустимом мн-ве, заданном нор-вом
 $Ax \leq b$

III Укажем, что эти задачи отличаются
только условиями, накладываемыми на
допустимое мн-во.

Покажем, что из

$$\begin{cases} A^1 x \leq b^1 & (1) \\ A^2 x = b^2 & (2) \\ x_j \geq 0 \quad \forall j \in Y & (3) \end{cases} \Leftrightarrow Ax \leq b$$

т.е. построим такое A и b

b^1 и A^1 - и так подберем, $\forall$ том

$$a) x_j \geq 0 \Leftrightarrow Ax \leq \begin{bmatrix} 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot x \leq 0 \quad // \text{размер вектора}$$

$$b) A^2 x = b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 x \leq b^2 \\ -A^2 x \leq -b^2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ -A^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ -b^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad - \text{построили}$$

Брызгалов Антон, 321 гр.
Мирошник Влад, 321 гр.
Смирнов Александр, 321 гр.
Аграновский Михаил, 321 гр.

Задача 4. В док-ве утв. ВЛП $\propto$ 3-ВЛП для
 $\mathcal{D}_i(z) = z_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \vee \dots \vee z_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$, $\alpha_{i_j} \neq 0 \quad \forall j = \overline{1, k}$

случаи $k=1, 2$ свести к $k=3$

Решение: обозначим $y_j = z_{i_j}^{\alpha_{i_j}} \rightarrow \mathcal{D}_i(z) = y_1 \vee \dots \vee y_k$

Утв. $\forall x, y \in \{0, 1\} \quad x = (x \vee y)(x \vee \bar{y})$

Док-во: $(x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x \cdot x \vee x \bar{y} \vee yx \vee y \bar{y} =$
 $= x \vee x(\bar{y} \vee y) = x \quad \blacksquare$

Воспользуемся доказанным утверждением:

$k=1$: $y_1 = (y_1 \vee u_1)(y_1 \vee \bar{u}_1) = (y_1 \vee u_1 \vee u_2)(y_1 \vee u_1 \vee \bar{u}_2) \cdot$
 $\cdot (y_1 \vee \bar{u}_1 \vee u_2)(y_1 \vee \bar{u}_1 \vee \bar{u}_2)$

если $y_1 = 1$, то $\exists u_1, u_2 : -||- = 1$

если $y_1 = 0$, то $\forall u_1, u_2 \quad -||- = 0$

$k=2$: $y_1 \vee y_2 = (y_1 \vee y_2 \vee u)(y_1 \vee y_2 \vee \bar{u})$

если $y_1 \vee y_2 = 1$, то $\exists u : -||- = 1$

если $y_1 \vee y_2 = 0$, то $\forall u : -||- = 0$

$A_3(I)$ делаем $\in p_2(I, II)$ шагов

Если "да", то остан-ся, "нет" или нет ответа,
то переходим к след 5

Если ответ "да" не получили, то $A(I)$ даёт
ответ "нет" за

$$t_A(I) \in p_2(I, II) \cdot |\Sigma|^{p_1(III)} \sim 2^{p(I, II)}$$

Т. док

3.3. Док-то, что задача СЧ (составного числа)
 $\in NP$ (проверить, что число составное) Надо
выбрать подсказку и док-то, что проверка ее
полиномиальна.

матрицу поэлементно.

$$|e(I)| = \underbrace{\lceil \log_{10} m \rceil + \lceil \log_{10} B \rceil + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lceil \log_{10} d(c_i, c_j) \rceil}_{\text{числа}} +$$

$$+ \underbrace{2 + (1 + 2 + \dots + m - 1) - 1}_{\text{раздел. символов}} =$$

$$= \lceil \log_{10} m \rceil + \lceil \log_{10} B \rceil + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lceil \log_{10} d(c_i, c_j) \rceil + 1 + \frac{m(m-1)}{2} =$$

$$= \lceil \log_{10} m \rceil + \lceil \log_{10} B \rceil + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lceil \log_{10} d(c_i, c_j) \rceil + \frac{m^2 - m + 2}{2}$$

$$|e(I)| \leq \lceil \log_{10} m \rceil + \lceil \log_{10} B \rceil + \frac{m(m-1)}{2} \max_{1 \leq i < j \leq m} \lceil \log_{10} d(c_i, c_j) \rceil + m^2 - m + 2$$

Брызгалов Антон, 321 гр.
Мирошник Влад, 321 гр.
Смирнов Александр, 321 гр.
Аграковский Михаил, 321 гр.

Задача 1 Для задачи КМ предложить $e(KM)$ и посчитать $VI |e(I)|$. Сравнить с оценкой Гэри-Джонса: $m + \lceil \log_2 V \rceil + \max_{i,j} \lceil \log_2 d(c_i, c_j) \rceil$

Решение: в данной задаче мы имеем следующие входные параметры:

- 1) m — число городов + $c_1, \dots, c_m$ — список городов
- 2) $d(c_i, c_j)$, $i, j = \overline{1, m}$ — расстояния между городами
- 3) B — параметр-ограничитель

Расстояния между городами будем записывать в виде матрицы:

$$\begin{matrix} & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & d(c_1, c_2) & \dots & d(c_1, c_m) \\ d(c_2, c_1) & 0 & \dots & d(c_2, c_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d(c_m, c_1) & d(c_m, c_2) & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Заметим, что данная матрица — симметричная с нулевой главной диагональю, поэтому имеет смысл закодировать только часть матрицы, находящуюся над главной диагональю.

Введем такой алфавит кодировки: $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$, т.е. кодировать натуральные числа будем в десятичном виде, а также использовать разделительный символ "-".

Предложим такую кодировку для данной задачи:
 $m - B - d(c_1, c_2) - d(c_1, c_3) - \dots - d(c_1, c_m) - d(c_2, c_3) - \dots - d(c_2, c_m) - \dots - d(c_{m-1}, c_m)$

Эта кодировка однозначна, т.к. по ней с легкостью можно восстановить параметры m и B , а

Задача 2.

Предложить алгоритм проверки на простоту числа, найти его временную сложность

Алгоритм

```
boolean t;  
int a, b, N, i;
```

```
begin
```

```
t = true; // изнач. считаем, что число простое
```

```
i = 2;
```

```
a = N div i;
```

```
b = N mod i;
```

```
if (b = 0) then i = i + 1;
```

```
while (a >= 1) do //  $\frac{N}{i} \geq i$ 
```

```
begin
```

```
if (b = 0) then
```

```
begin
```

```
t = false;
```

```
break;
```

```
end;
```

```
b = N mod i;
```

```
a = N div i;
```

```
i = i + 1; // по логотипу
```

```
end;
```

```
if (N = 1) then write ("Don't know")  
else
```

```
if t then write ("Yes")
```

```
else write ("No");
```

```
end
```

Теперь оценим сложность // n - длина числа

I Деление div и mod

Столбиком $\approx (n$ вычитаний + n сравнений)

то n битовых операций

Итого: $O(n^2)$

II Все операции в цикле i будет иметь длину не более $n \cdot \log_2 + 1$
 // из-за while

Получается 1 сравнение на n битов
 + 2 деления + сложения на $\frac{n}{2}$ битов $\ominus$

$$\ominus n + O(n^2) + \frac{n}{2} \Rightarrow O(n^2)$$

III Нте кол-во итераций цикла while
 В худшем случае закончится, когда
 $\frac{N}{i} \leq i \Leftrightarrow N \leq i^2$

$$n = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$$

$$\lfloor \log_2 i^2 \rfloor + 1 = n$$

$$\log_2 i = \frac{n-1}{2}, \text{ т.е. длина (max) } i = \frac{n-1}{2}$$

$$\text{max число итераций цикла } \frac{2 \cdot \frac{n-1}{2}}{2}$$

IV Общая сложность

$$\frac{2 \cdot \frac{n-1}{2}}{2} \cdot O(n^2) = O\left(2 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot n^2\right)$$

кол-во итераций сложность итерации